**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

**GREEK MATHEMATICAL SOCIETY**
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

# ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
# 30η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
# 23 Φεβρουαρίου 2013

## Θέματα μικρών τάξεων

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

**(α)** Να γράψετε την παράσταση $A = k^4 + 4$, όπου $k$ θετικός ακέραιος, ως γινόμενο δύο παραγόντων που ο καθένας τους να είναι άθροισμα δύο τετραγώνων ακεραίων αριθμών. ***Μονάδες 2***

**(β)** Να απλοποιήσετε την παράσταση

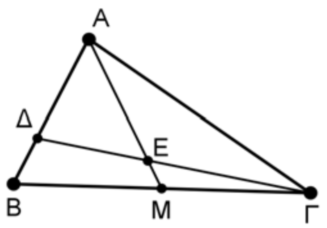
$$K = \frac{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(6^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\cdots\cdot\left((2n)^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(5^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\cdots\cdot\left((2n-1)^4+\frac{1}{4}\right)}$$

και να τη γράψετε ως άθροισμα τετραγώνων δύο διαδοχικών θετικών ακέραιων.

***Μονάδες 3***

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$, με $ΑΒ < ΑΓ$. Έστω $Μ$ το μέσο της πλευράς $ΒΓ$. Στην πλευρά $ΑΒ$ θεωρούμε σημείο $Δ$ τέτοιο ώστε, αν το ευθύγραμμο τμήμα $ΓΔ$ τέμνει τη διάμεσο $ΑΜ$ στο σημείο $Ε$, τότε ισχύει ότι $ΑΔ = ΔΕ$. Να αποδείξετε ότι $ΑΒ = ΓΕ$. ***Μονάδες 5***




### ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Έστω $A = \overline{abcd} = a\cdot 10^3 + b\cdot 10^2 + c\cdot 10 + d$ τετραψήφιος θετικός ακέραιος με ψηφία τέτοια ώστε να ισχύουν: $a \geq 7$ και $a > b > c > d > 0$. Θεωρούμε και τον θετικό ακέραιο $B = \overline{dcba} = d\cdot 10^3 + c\cdot 10^2 + b\cdot 10 + a$, που προκύπτει από τον $A$ με αντίστροφη γραφή των ψηφίων του. Αν δίνεται ότι ο αριθμός $A + B$ έχει όλα τα ψηφία του περιττά, να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του αριθμού $A$.

***Μονάδες 5***

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Να βρείτε όλες τις τριάδες $(x, y, z)$ θετικών ακέραιων αριθμών που είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{4}{z} = 1.$$

***Μονάδες 5***

***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες και 30 λεπτά***
***Καλή επιτυχία***

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

**GREEK MATHEMATICAL SOCIETY**
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

# ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
# 30η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
# 23 Φεβρουαρίου 2013
# Θέματα μεγάλων τάξεων

.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Δίνεται η ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_n)$, $n = 1,2,3,...$ με

$$a_1 = 2 \text{ και } a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}\right),\ n \geq 2.$$

Να προσδιορίσετε τον όρο $a_{2013}$.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Στο σύνολο των ακεραίων να λύσετε την εξίσωση: $y = 2x^2 + 5xy + 3y^2$ .

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνονται τα σύνολα $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, ..., \mathrm{A}_{160}$ τέτοια ώστε $|\mathrm{A}_i| = i,\ i = 1,2,...,160$. Με τα στοιχεία των συνόλων αυτών κατασκευάζουμε καινούρια σύνολα $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, ..., \mathrm{M}_n$ με την ακόλουθη διαδικασία: Στο πρώτο βήμα επιλέγουμε κάποια από τα σύνολα $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, ..., \mathrm{A}_{160}$ και αφαιρούμε από καθένα από αυτά τον ίδιο αριθμό στοιχείων. Όλα τα στοιχεία που αφαιρούμε αποτελούν τα στοιχεία του συνόλου $\mathrm{M}_1$. Στο δεύτερο βήμα επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία στα σύνολα που έχουν προκύψει μετά την εφαρμογή του πρώτου βήματος και έτσι ορίζουμε το σύνολο $\mathrm{M}_2$. Συνεχίζουμε ομοίως μέχρι που να εξαντληθούν όλα τα στοιχεία των συνόλων $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, ..., \mathrm{A}_{160}$ ορίζοντας έτσι τα σύνολα $\mathrm{M}_3, ..., \mathrm{M}_n$. Να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του αριθμού $n$.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $\mathrm{c(O,R)}$ (με κέντρο το σημείο $\mathrm{O}$ και ακτίνα $\mathrm{R}$ ) και έστω $\Delta$ τυχόν σημείο της πλευράς $\mathrm{B\Gamma}$ (διαφορετικό από το μέσο της $\mathrm{B\Gamma}$ ). Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $\mathrm{BO\Delta}$, έστω $\mathrm{c_1}$, τέμνει τον κύκλο $\mathrm{c(O,R)}$ στο σημείο $\mathrm{K}$ και την $\mathrm{AB}$ στο σημείο $\mathrm{Z}$. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $\mathrm{\Gamma O\Delta}$, έστω $\mathrm{c_2}$, τέμνει τον κύκλο $\mathrm{c(O,R)}$ στο σημείο $\mathrm{M}$ και την $\mathrm{A\Gamma}$ στο σημείο $\mathrm{E}$. Τέλος, ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $\mathrm{AEZ}$, έστω $\mathrm{c_3}$, τέμνει τον κύκλο $\mathrm{c(O,R)}$ στο σημείο $\mathrm{N}$. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\mathrm{AB\Gamma}$ και $\mathrm{KMN}$ είναι ίσα.

***Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες και 45 λεπτά.***
***Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες*** ***Καλή επιτυχία***