



8^{ος} ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
«Ο ΕΠΙΜΕΝΙΔΗΣ»
ΣΑΒΒΑΤΟ, 19 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2019

Ενδεικτικές λύσεις

Α΄ Γυμνασίου

1. i) Να απλοποιήσετε σε ανάγωγα τα κλάσματα κάθε έναν από τους αριθμούς: $\frac{24}{72}$, $\frac{15}{90}$ και $\frac{17}{34}$.

ii) Αν $A = 12 \cdot \left(\frac{24}{72} + \frac{15}{90} \right) + \frac{17}{34} \cdot (2^4 - 2 \cdot 4)$, $B = \frac{5}{3} : \frac{11}{9} - 4 : \frac{22}{2}$ και

$\Gamma = (3,14 \cdot 45,67 + 3,14 \cdot 54,33) : 62,8$ να αποδείξετε ότι $A = 10$, $B = 1$ και $\Gamma = 5$.

iii) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $2 \cdot A^3 + (3 \cdot B)^2 + 2\Gamma \cdot B^{2020}$ όπου τα A, B, Γ είναι εκείνα του παραπάνω ερωτήματος.

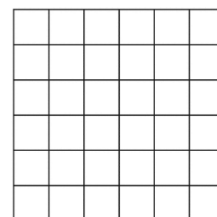
Λύση

$$\frac{24}{72} = \frac{1}{3}, \frac{15}{90} = \frac{1}{6}, \frac{17}{34} = \frac{1}{2} \text{ οπότε } A = 12 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) + \frac{1}{2} \cdot (16 - 8) = 12 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 8 = 6 + 4 = 10$$

$$B = \frac{5}{3} \cdot \frac{9}{11} - 4 \cdot \frac{1}{11} = \frac{5 \cdot 3}{11} - \frac{4}{11} = \frac{15}{11} - \frac{4}{11} = \frac{11}{11} = 1,$$

$$\Gamma = [3,14 \cdot (45,67 + 54,33)] : 62,8 = (3,14 \cdot 100) : 62,8 = 314 : 62,8 = 5$$

2. Ένα τετράγωνο πλευράς 6cm διαιρείται σε 36 τετράγωνα πλευράς 1cm όπως στο διπλανό σχήμα. Να βρείτε το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων κάθε ένα από τα οποία έχει την ιδιότητα η μία πλευρά να είναι διπλάσια της άλλης.



Λύση

Οι διαστάσεις των ζητούμενων ορθογωνίων θα είναι 2x1, 4x2 και 6x3, ενώ ο προσανατολισμός θα είναι οριζόντιος ή κατακόρυφος.

Μετράμε πρώτα τα οριζόντια 2x1: 5 σε κάθε οριζόντια γραμμή επί 6 γραμμές, σύνολο 30.

Για τα 4x2: Έχουμε 3 στις 2 πρώτες γραμμές, άλλα τόσα στις γραμμές 2,3 και μέχρι τις γραμμές 5,6 έχουμε 5 τριάδες, σύνολο 15.

Για τα 6x3: Έχουμε 1 με τις γραμμές 1,2,3, όμοια για τις 2,3,4, τις 3,4,5 και τις 4,5,6, σύνολο 4.

Έτσι συνολικά έχουμε $30 + 15 + 4 = 49$ ορθογώνια σε οριζόντια διάταξη. Όμοια έχουμε άλλα τόσα σε κατακόρυφη διάταξη, δηλαδή σύνολο 98.

3. Ένα Γυμνάσιο έχει συνολικά 340 μαθητές. Αν οι μαθητές της Γ τάξης είναι κατά 8% λιγότεροι από εκείνους της Β και 15% περισσότεροι από εκείνους της Α πόσους μαθητές έχει η κάθε τάξη;

Λύση

Αν συμβολίσουμε με Α, Β και Γ τους αντίστοιχους μαθητές, έχουμε τις αναλογίες:

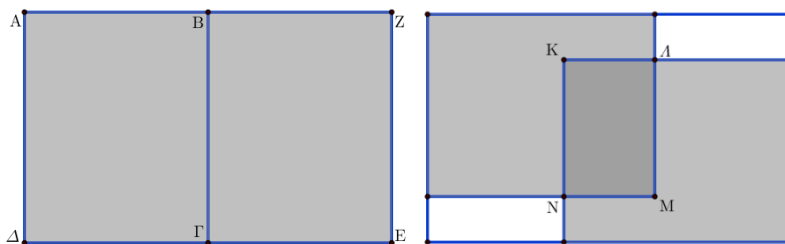
$$\frac{\Gamma}{B} = \frac{92}{100} = \frac{23}{25} \quad \eta \quad \frac{\Gamma}{23} = \frac{B}{25} \quad \kappa\alpha\iota \quad \frac{\Gamma}{A} = \frac{115}{100} = \frac{23}{20} \quad \eta \quad \frac{\Gamma}{23} = \frac{A}{20}$$

$$\text{Επομένως, } \frac{A}{20} = \frac{B}{25} = \frac{\Gamma}{23} = \frac{A+B+\Gamma}{20+25+23} = \frac{340}{68} = 5$$

Δηλαδή έχουμε $A = 5 \cdot 20 = 100$, $B = 5 \cdot 25 = 125$, $\Gamma = 5 \cdot 23 = 115$

4. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει διαιρεθεί σε δύο ίσα μεταξύ τους μικρότερα ορθογώνια ΑΒΓΔ και ΒΓΕΖ όπως φαίνεται στο πρώτο σχήμα. Αν η περίμετρος του αρχικού ορθογωνίου είναι ίση με 52cm ενώ η αντίστοιχη περίμετρος κάθε ενός από τα μικρότερα ισούται με 36cm, να βρείτε τις διαστάσεις και τα εμβαδά των ορθογωνίων αυτών.

Αν κάθε ένα από τα δύο μικρότερα ορθογώνια έχουν διαστάσεις 8 cm x10 cm και τα τοποθετήσουμε μέσα στο αρχικό ορθογώνιο με τη διάταξη του δεύτερου σχήματος, να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του ορθογωνίου ΚΛΜΝ που σχηματίζεται από το επικαλυπτόμενο μέρος των δύο ορθογωνίων.



Λύση

Η διαφορά του αθροίσματος των περιμέτρων των δύο μικρότερων ορθογωνίων ΑΒΓΔ και ΒΖΕΓ από εκείνη του μεγαλύτερου ΑΖΕΔ (στο πρώτο σχήμα), ισούται με το διπλάσιο της κοινής τους πλευράς ΒΓ (καθώς αυτή υπολογίζεται δύο επί πλέον φορές στο άθροισμα των δύο περιμέτρων). Δηλαδή αν ονομάσουμε με $\alpha = \text{ΒΓ}$ την κοινή αυτή πλευρά, έχουμε $2\alpha = 2 \cdot 36 - 52 = 20$, επομένως $\alpha = 10 \text{ cm}$.

Αν $\beta = \text{ΑΒ}$ είναι η μικρότερη διάσταση των δύο μικρών ορθογωνίων, έχουμε $2\alpha + 2\beta = 36 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 18$

Δηλαδή $\beta = 8 \text{ cm}$.

Οπότε οι διαστάσεις του μεγάλου ορθογωνίου είναι $10 \text{ cm} \times 16 \text{ cm}$.

Τα αντίστοιχα εμβαδά είναι $8 \cdot 10 = 80 \text{ cm}^2$ και $10 \cdot 16 = 160 \text{ cm}^2$

Για το κοινό μέρος των δύο ορθογωνίων στο δεύτερο σχήμα, έχουμε ότι κάθε διάσταση του ισούται με το διπλάσιο μιας πλευράς του μικρότερου ορθογωνίου μειωμένο κατά την αντίστοιχη πλευρά του μεγάλου. Δηλαδή $\text{ΚΛ} = 2 \cdot 10 - 16 = 4 \text{ cm}$ και $\text{ΚΝ} = 2 \cdot 8 - 10 = 6 \text{ cm}$, με εμβαδόν $(\text{ΚΛΜΝ}) = 4 \cdot 6 = 24 \text{ cm}^2$.