ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
29η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
3 Μαρτίου 2012

Θέματα μικρών τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (με $\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma} < \mathrm{B\Gamma}$), εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(\mathrm{O}, R)$ (με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα R). Ο κύκλος $c_1(\mathrm{A}, \mathrm{AB})$ (με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα ΑΒ) τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ και τον περιγεγραμμένο κύκλο $c(\mathrm{O}, R)$ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι η πλευρά ΑΓ διχοτομεί τη γωνία $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$, να λύσετε την εξίσωση

$$\left| |x-4| - 2x + 8 \right| = ax + 4.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Οι θετικοί ακέραιοι m, n, με $m > n$, ικανοποιούν την εξίσωση

$$\text{ΕΚΠ}\{m,n\} + \text{ΜΚΔ}\{m,n\} = m + n. \qquad (*)$$

(α) Να αποδείξετε ότι ο n είναι διαιρέτης του m.

(β) Αν επιπλέον ισχύει ότι $m - n = 10$, να προσδιορίσετε όλα τα ζευγάρια (m, n) που είναι λύσεις της εξίσωσης (*).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Πάνω σε επίπεδο Π δίνεται ευθεία ε και πάνω στην ε δίνονται δύο σημεία $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$, διαφορετικά μεταξύ τους. Θεωρούμε ακόμη και δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία $\mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4$ του επιπέδου Π που δεν ανήκουν στην ευθεία ε. Να εξετάσετε, αν είναι δυνατόν να τοποθετηθούν τα σημεία A_3 και A_4 σε τέτοιες θέσεις, ώστε να σχηματίζεται ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός ισοσκελών τριγώνων με κορυφές τρία από τα τέσσερα σημεία $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4$:

(α) όταν τα σημεία $\mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4$ ανήκουν σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς την ευθεία ε,

(β) όταν τα σημεία $\mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4$ ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ε.

Να δώσετε όλες τις δυνατές περιπτώσεις και σε κάθε περίπτωση να εξηγήσετε πως μπορούν να προσδιοριστούν γεωμετρικά τα σημεία A_3 και A_4.

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
29η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
3 Μαρτίου 2012

Θέματα μεγάλων τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1
Οι θετικοί ακέραιοι p, q είναι πρώτοι μεταξύ τους και ικανοποιούν την εξίσωση

$$p+q^2=\left(n^2+1\right)p^2+q,$$

όπου η παράμετρος n είναι θετικός ακέραιος. Βρείτε όλα τα δυνατά ζεύγη (p,q).

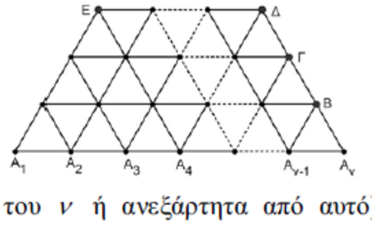
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2
Να προσδιορίσετε όλα τα μη μηδενικά πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ με πραγματικούς συντελεστές, ελαχίστου δυνατού βαθμού, τέτοια ώστε

$$P\left(x^2\right)+Q(x)=P(x)+x^5Q(x), \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (με $\text{ΑΒ}<\text{ΑΓ}<\text{ΒΓ}$), εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(\text{O},R)$ (με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα R). Η διχοτόμος ΑΔ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο $c(\text{O},R)$ στο σημείο Κ. Ο κύκλος $c_1(\text{O}_1,R_1)$ (που έχει το κέντρο στην ΟΑ και περνάει από τα σημεία Α, Δ), τέμνει την ΑΒ στο Ε και την ΑΓ στο Ζ. Αν Μ, N είναι τα μέσα των ΖΓ και ΒΕ αντίστοιχα, αποδείξτε ότι οι ευθείες ΕΖ, ΔΜ, ΚΓ περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω Τ), οι ευθείες ΕΖ, ΔΝ, ΚΒ περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω S) και ότι η ΟΚ είναι μεσοκάθετη της TS.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4
Το ισοσκελές τραπέζιο του σχήματος αποτελείται από ίσα μεταξύ τους ισόπλευρα τρίγωνα που οι πλευρές τους έχουν μήκος 1. Η πλευρά $\text{Α}_1\text{Ε}$ έχει μήκος 3 και η μεγάλη βάση του $\text{Α}_1\text{Α}_\nu$ έχει μήκος $\nu-1$. Ξεκινάμε από το σημείο Α_1 και

κινούμαστε κατά μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων που ορίζονται μόνο προς τα δεξιά και επάνω (λοξά αριστερά ή λοξά δεξιά).



Υπολογίστε (συναρτήσει του ν ή ανεξάρτητα από αυτό) το πλήθος όλων των δυνατών διαδρομών που μπορούμε να ακολουθήσουμε, με σκοπό να καταλήξουμε στα σημεία Β, Γ, Δ, Ε, όπου ν ακέραιος μεγαλύτερος του 3.

Διάρκεια εξέτασης 4 ώρες .
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Καλή επιτυχία!***