



6^{ος} ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
«Ο ΕΠΙΜΕΝΙΔΗΣ»
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2017

Ενδεικτικές λύσεις

Α' Γυμνασίου

1. Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς με τους οποίους είναι ίσες οι ακόλουθες παραστάσεις:

$$\alpha = 2^5 - (2^4 + 2^3) - 2^2 - 2 - 1, \quad \beta = \frac{17}{102} + \frac{31}{62} + \frac{29}{87} + \frac{78}{26} \text{ και}$$

$$\gamma = \frac{(3^2 - 2^3)^{2017} + 10^3 \cdot 0,001}{0,5^2}$$

Για τις τιμές που βρήκατε, να εξετάσετε αν είναι ισχύει η ισότητα: $(\gamma:\beta):\alpha = \gamma:(\beta:\alpha)$.

Είναι σωστή η παραπάνω ισότητα για οποιαδήποτε τριάδα αριθμών α, β, γ ;

Λύση

$$\alpha = 32 - (16 + 8) - 4 - 2 - 1 = 32 - 24 - 4 - 2 - 1 = 1$$

Και απλοποιώντας τα κλάσματα στο β , έχουμε:

$$\beta = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 3 = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + 3 = \frac{6}{6} + 3 = 4$$

Και τηρώντας προτεραιότητα πράξεων στο γ , έχουμε:

$$\gamma = \frac{(9-8)^{2017} + 1000 \cdot 0,001}{0,25} = \frac{1^{2017} + 1}{0,25} = \frac{2}{0,25} = 8$$

Οπότε $(\gamma:\beta):\alpha = (8:4):1 = 2:1 = 2$ και $\gamma:(\beta:\alpha) = 8:(4:1) = 8:4 = 2$, επομένως ισχύει η ισότητα. Δεν είναι όμως σωστή για οποιαδήποτε τριάδα αριθμών.

Για παράδειγμα, $(8:4):2 = 2:2 = 1$, ενώ $8:(4:2) = 8:2 = 4$

2. Ένας κηπουρός φυτεύει γαρύφαλλα σε ένα τετράγωνο, του οποίου η περίμετρος είναι 8μ. Εξωτερικά του τετραγώνου σχεδιάζει τέσσερα ισοσκελή τρίγωνα, τα οποία έχουν βάσεις τις πλευρές του τετραγώνου και ύψος ίσο με την πλευρά του τετραγώνου και φυτεύει γαρδένιες στα τρίγωνα αυτά. Περιβάλλει μετά το τετράγωνο και τα τρίγωνα με ένα κύκλο, ο οποίος περνά από τις κορυφές των τριγώνων, όπως φαίνεται στο

διπλανό σχήμα και φυτεύει στα κενά που δημιουργούνται μεταξύ του κύκλου και των τριγώνων μαργαρίτες. Να υπολογιστεί πόση επιφάνεια του κήπου είναι φυτεμένη με γαρύφαλλα, πόση με γαρδένιες και πόση με μαργαρίτες.

Λύση

Η πλευρά του τετραγώνου ισούται με $8:4=2\mu$, επομένως το εμβαδόν του ισούται με $2^2=4\mu$ όπου έχουμε τα γαρύφαλλα.

Το εμβαδόν κάθε τριγώνου ισούται με το γινόμενο της βάσης επί το αντίστοιχο ύψος του διαιρεμένο δια 2, δηλαδή το μισό από εκείνο του τετραγώνου, επομένως 2μ . Έτσι τα τέσσερα τρίγωνα όπου έχουμε γαρδένιες έχουν συνολικό εμβαδόν ίσο με 8μ .

Για να βρούμε το υπόλοιπο εμβαδόν όπου φυτεύονται μαργαρίτες, πρέπει από το εμβαδόν του κύκλου να αφαιρέσουμε το άθροισμα των εμβαδών που βρήκαμε.

Η διάμετρος του κύκλου ισούται με την απόσταση των κορυφών δύο τριγώνων με βάσεις δύο απέναντι πλευρές του τετραγώνου. Αυτή η απόσταση ισούται με το άθροισμα της πλευράς του τετραγώνου με τα δύο ύψη των τριγώνων, δηλαδή τρεις φορές την πλευρά, επομένως 6. Έτσι η ακτίνα του κύκλου ισούται με 3μ και το εμβαδόν του με $E = \pi \rho^2 = \pi 3^2 = 9\pi \mu$ ($\pi=3,14\dots$)

Δηλαδή η έκταση που είναι φυτεμένη με μαργαρίτες έχει εμβαδόν ίσο με $9\pi-4-8=9\pi-12 \mu$. που ισούται κατά προσέγγιση με $9 \cdot 3,14 - 12 = 16,26 \mu$.

3.

- a) Να βρείτε όλους τους διαιρέτες των αριθμών 24 και 25.
- b) Ποιοι είναι οι φυσικοί αριθμοί από το 1 έως το 20 που έχουν ακριβώς 3 διαιρέτες;
- c) Να βρείτε ένα φυσικό αριθμό μεγαλύτερο του 900 και μικρότερο του 1000 που έχει ακριβώς τρεις διαιρέτες.

Λύση

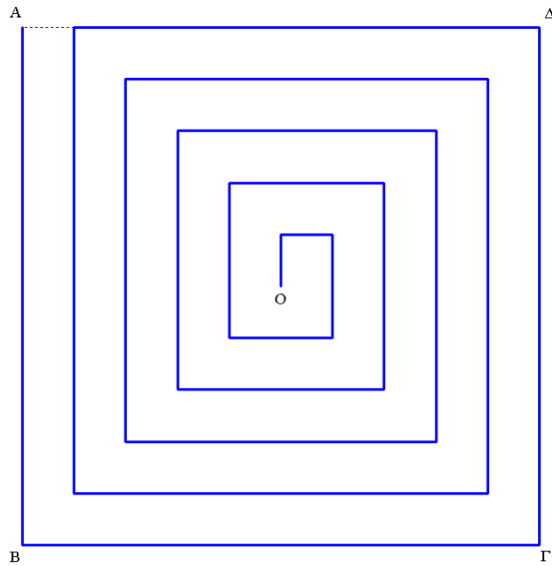
Ένας τρόπος για να τους γράψουμε είναι να τους βάλουμε ανά ζευγάρια με γινόμεβο τον αριθμό: $1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6 = 24$, $1 \cdot 25 = 5 \cdot 5 = 25$

έτσι έχουμε τους 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 για το 24 και τους 1, 5, 25 για το 25.

Παρατηρούμε ότι όπως το 5 έτσι και όλα τα τετράγωνα πρώτων αριθμών έχουν ακριβώς τρεις διαιρέτες. Δηλαδή η απάντηση στο δεύτερο ερώτημα είναι οι αριθμοί $2^2 = 4$ και $3^2 = 9$ ενώ στο τρίτο ερώτημα η απάντηση είναι $31^2 = 961$ καθώς είναι το μόνο τετράγωνο φυσικού αριθμού μεταξύ 900 και 1000.

4. Τα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι κορυφές τετραγώνου με πλευρά ίση με 10 μονάδες. Με αρχή το κέντρο Ο του τετραγώνου, σχεδιάζουμε μία τεθλασμένη γραμμή, αποτελούμενη από οριζόντια και κατακόρυφα ευθύγραμμα τμήματα, η οποία καταλήγει στο σημείο Α. Δημιουργούμε έτσι, ένα «σπειροειδή λαβύρινθο» όπως βλέπετε στο σχήμα, ο οποίος αποτελείται από διαδρόμους σταθερού πλάτους το οποίο και να υπολογίσετε. Ποιο είναι το πλήθος των διαδοχικών ευθύγραμμων τμημάτων από τα οποία αποτελείται η τεθλασμένη γραμμή και πόσο είναι το συνολικό μήκος της; Αν συνεχίσουμε την τεθλασμένη γραμμή από το σημείο Α στο ίδιο μοτίβο (πρώτα λίγο προς τα πάνω, μετά προς τα δεξιά, κλπ) μέχρι να καταλήξουμε στην πάνω αριστερή κορυφή τετραγώνου πλευράς 100 μονάδων, σχηματίζοντας ένα μεγαλύτερο «σπειροειδή

λαβύρινθο» πάντα με διαδρόμους σταθερού πλάτους, πόσα θα είναι τότε τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα και πόσο το συνολικό μήκος της τεθλασμένης γραμμής;



Λύση

$AB=BG=\Gamma\Delta=10\mu$ και το πλάτος των διαδρόμων ισούται με $10:10=1\mu$.

Το συνολικό μήκος αρχίζοντας από τα μικρότερα τμήματα ισούται με:

$$1+1+2+2+3+3+4+4+5+6+6+7+7+8+8+9+9+10+10+10=$$

$$= 2 \cdot (1+2+3+4+5+6+7+8+9+10) + 10 = 2 \cdot 55 + 10 = 120$$

Αποτελείται από 21 συνολικά τμήματα (10 οριζόντια και 11 κατακόρυφα) και κάθε 2 τμήματα το μήκος αυξάνεται κατά μία μονάδα, εκτός το τελευταίο που παραμένει ίσο με 10.

Με το ίδιο σκεπτικό, για τετράγωνο πλευράς ίσης με 100μ, θα έχουμε 100 οριζόντια και 101 κατακόρυφα, σύνολο 201 τμήματα, με συνολικό μήκος ίσο με:

$$1+1+2+2+3+3+\dots+100+100+100 = 2 \cdot (1+2+3+\dots+100) + 100 =$$

$$= 2 \cdot 5050 + 100 = 1200$$

Καθώς $1+100=2+99=\dots=50+51=101$, οπότε το άθροισμα στην παρένθεση ισούται με:

$$50 \cdot 101 = 5050$$