ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ
Δικταίου Άντρου 3
71201 Ηράκλειο Κρήτης
e-mail : newsfrommath@yahoo.gr
Ιστοσελίδα: www.mathher.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
BRANCH OF HERAKLION
3, Dikteou Androu Str
71201, Heraklion, Crete
e-mail : newsfrommath@yahoo.gr
website: www.mathher.gr

ΣΑΒΒΑΤΟ, 29 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2016
5^ος ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ «*Ο ΕΠΙΜΕΝΙΔΗΣ*»

Α΄ Γυμνασίου

1. Αν

$$A=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{6}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{7}\right)$$

και

$$B=\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{7}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{8}\right)$$

να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A+\frac{1}{B}$.

<u>Λύση</u>

Κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα και απλοποιούμε τους αριθμούς που βρίσκονται ταυτόχρονα σε αριθμητή και παρονομαστή (το 2 με το 2, το 3 με το 3 κλπ). Αν δεν γίνει η απλοποίηση, προκύπτουν μεγαλύτεροι αριθμοί και θα χρειαστεί να απλοποιήσουμε το τελικό κλάσμα.

$$A=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{6}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{7}\right)=$$

$$=\left(\frac{2}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{3}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{4}{4}+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{5}{5}+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(\frac{6}{6}+\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{7}{7}+\frac{1}{7}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{8}{7}=\frac{8}{2}=4$$

$$B=\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{7}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{8}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{8}=\frac{1}{8}$$

$A+\frac{1}{B}=4+8=12$,(καθώς ο αντίστροφος του Β είναι το 8).

2. Ένας καταστηματάρχης αγόρασε 45 ίδια τάμπλετ 7 ιντσών και πλήρωσε 5.400 €.
   i) Αν αγόραζε τάμπλετ 10 ιντσών που ήταν κατά 30 € ακριβότερα το κάθε ένα, πόσα τάμπλετ θα αγόραζε με τα ίδια χρήματα;
   ii) Αν πουλήσει τα 20 τάμπλετ των 7 ιντσών που αγόρασε με κέρδος 25% και τα υπόλοιπα με κέρδος 20%, πόσα χρήματα θα εισπράξει συνολικά;
   iii) Με τα χρήματα που θα εισπράξει συνολικά, πόσα το πολύ τάμπλετ των 10 ιντσών θα μπορέσει να αγοράσει, αν η τιμή τους έχει ελαττωθεί κατά 4%;

<u>Λύση</u>

i) Για κάθε τάμπλετ, πλήρωσε $5.400:45=120$ €

Επομένως, τα μεγαλύτερα τάμπλετ, κοστίζουν 120+30=150€ το κάθε ένα. Δηλαδή θα αγόραζε, $5.400:150=36$ τάμπλετ.

ii) Τα 20 τάμπλετ, τα πουλά προς $120\cdot\frac{125}{100}=120\cdot\frac{5}{4}=150$ €, ενώ τα υπόλοιπα 25 τα πουλά προς $120\cdot\frac{120}{100}=120\cdot\frac{6}{5}=144$ €. Επομένως, θα εισπράξει συνολικά: $20\cdot150+25\cdot144=6.600$ €

iii) Η μειωμένη τιμή των μεγάλων τάμπλετ, ισούται με $150\cdot\frac{96}{100}=144$ €, ενώ η διαίρεση 6.600:144, δίνει πηλίκο 45 και υπόλοιπο 120. Δηλαδή, θα μπορέσει να αγοράσει 45 το πολύ τάμπλετ των 10 ιντσών.

3. Ένα τραπέζιο του οποίου η μικρή βάση είναι το $\frac{1}{3}$ της μεγάλης βάσης και το ύψος του είναι 56 μ., έχει το ίδιο εμβαδόν με ένα τετράγωνο που έχει πλευρά ίση με το ύψος του τραπεζίου.
   α) Να βρεθεί το εμβαδόν του τραπεζίου.
   β) Να βρεθούν τα μήκη των δύο βάσεων.

<u>Λύση</u>

α) Το εμβαδόν του τετραγώνου, επομένως και του τραπεζίου, ισούται με $56^2=3.136$ τ.μ.

β) Καθώς το εμβαδόν του τραπεζίου ισούται με το ημιάθροισμα των δύο βάσεων επί το ύψος, δηλαδή $\mathrm{E}=\frac{\mathrm{B}+\beta}{2}\cdot\upsilon$ προκύπτει ότι το ημιάθροισμα των δύο βάσεων ισούται με 56μ., δηλαδή το άθροισμα ισούται με $2\cdot56=112$ μ. Όμως η μεγάλη βάση είναι τριπλάσια της μικρής, επομένως η μικρή ισούται με $112:4=28$ μ. και η μεγάλη με $3\cdot28=84$ μ.
(Αλλιώς, με χρήση μεταβλητών, $x+3x=112\Leftrightarrow4x=112\Leftrightarrow x=28$)

4. Το γινόμενο των ηλικιών μιας μητέρας και των τριών παιδιών της ισούται με 41041. Να βρείτε το άθροισμα των ηλικιών των παιδιών. Μετά από πόσα χρόνια το άθροισμα των ηλικιών των τριών παιδιών θα είναι ίσο με την ηλικία που θα έχει τότε η μητέρα;

Λύση

Αναλύουμε το 41.041 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και προκύπτει ότι $41.041 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 41$. Επομένως, οι ηλικίες είναι 7, 11, 13 και 41 ετών με άθροισμα ηλικιών των παιδιών 7+11+13=31. Παρατηρούμε ότι για κάθε χρόνο που περνάει, η ηλικία της μητέρας αυξάνεται κατά 1, ενώ το άθροισμα των ηλικιών των τριών παιδιών αυξάνεται κατά 3, επομένως η διαφορά 41-31=10, μειώνεται κατά 2. Άρα, σε 10:2=5 χρόνια, το άθροισμα των ηλικιών των τριών παιδιών θα είναι ίσο με την ηλικία που θα έχει τότε η μητέρα τους.
(Αλλιώς, με χρήση μεταβλητών, $41 + x = 31 + 3x \Leftrightarrow x = 5$)