



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
27^η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 27 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2010

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να προσδιορίσετε το πλήθος των θετικών ακέραιων που δεν είναι δυνατόν να γραφούν στη μορφή $80κ + 3λ$, όπου $κ, λ \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ με πλευρές $ΑΒ = α$ και $ΒΓ = β$. Έστω $Ο$ το σημείο τομής των διαγωνίων του. Προεκτείνουμε την πλευρά $ΒΑ$ προς το μέρος του $Α$ κατά τμήμα $ΑΕ = ΑΟ$ και την διαγώνιο $ΔΒ$ προς το μέρος του $Β$ κατά τμήμα $ΒΖ = ΒΟ$. Αν το τρίγωνο $ΕΖΓ$ είναι ισόπλευρο, τότε να αποδείξετε ότι:

- (i) $β = α\sqrt{3}$, (ii) $ΑΖ = ΕΟ$, (iii) $ΕΟ \perp ΖΔ$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν a, b είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 3 και οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x, y και z έχουν γινόμενο 1, να αποδείξετε ότι:

$$(ax + b)(ay + b)(az + b) \geq 27.$$

Για ποιες τιμές των x, y και z αληθεύει η ισότητα;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνονται τρεις παράλληλες ευθείες $ε_1, ε_2$ και $ε_3$ ενός επιπέδου έτσι ώστε η ευθεία $ε_2$ να έχει την ίδια απόσταση $α$ από τις $ε_1$ και $ε_3$. Τοποθετούμε 5 σημεία M_1, M_2, M_3, M_4 και M_5 πάνω στις ευθείες $ε_1, ε_2$ και $ε_3$, έτσι ώστε σε κάθε ευθεία να υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο. Να προσδιορίσετε το μέγιστο αριθμό ισοσκελών τριγώνων που είναι δυνατό να σχηματιστούν με κορυφές τρία από τα σημεία M_1, M_2, M_3, M_4 και M_5 με κατάλληλη τοποθέτησή τους πάνω στις ευθείες $ε_1, ε_2$ και $ε_3$, σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- (α) $M_1, M_2, M_3 \in ε_2$, $M_4 \in ε_1$ και $M_5 \in ε_3$.
(β) $M_1, M_2 \in ε_1$, $M_3, M_4 \in ε_3$ και $M_5 \in ε_2$.

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Καλή επιτυχία!



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
27^η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"

ΣΑΒΒΑΤΟ, 27 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Θέματα μεγάλων τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να προσδιορίσετε τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης

$$x^4 - 6x^2 + 1 = 7 \cdot 2^y.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x και y έχουν άθροισμα 2α , όπου $\alpha > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$x^3 y^3 (x^2 + y^2)^2 \leq 4\alpha^{10}. \quad (1)$$

Για ποιες τιμές των x και y αληθεύει η ισότητα;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνεται τρίγωνο ABC εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) και έστω I το έκκεντρό του. Οι προεκτάσεις των AI, BI και CI τέμνουν το περιγεγραμμένο κύκλο στα σημεία D, E και F αντίστοιχα. Οι κύκλοι με διάμετρο ID, IE και IF τέμνουν τις πλευρές BC, AC και AB στα σημεία A_1, A_2, B_1, B_2 και C_1, C_2 αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ είναι ομοκυκλικά.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Στο επίπεδο θεωρούμε $k + n$ διαφορετικές μεταξύ τους ευθείες, όπου k ακέραιος με $k > 1$ και n θετικός ακέραιος, οι οποίες ανά τρεις δεν περνάνε από το ίδιο σημείο. Από τις ευθείες αυτές, k είναι παράλληλες μεταξύ τους ενώ οι υπόλοιπες n τέμνονται ανά δύο και δεν υπάρχει κάποια από αυτές που να είναι παράλληλη με τις k παράλληλες ευθείες. Όλες οι παραπάνω ευθείες τεμνόμενες διαμερίζουν το επίπεδο σε χωρία (π. χ τριγωνικά, πολυγωνικά και μη φραγμένα). Δύο χωρία θεωρούνται διαφορετικά, αν δεν έχουν κοινά σημεία ή αν έχουν κοινά σημεία μόνο στο σύνορό τους. Ένα χωρίο θα το ονομάζουμε "καλό" όταν βρίσκεται ανάμεσα στις παράλληλες ευθείες. Αν σε ένα σχηματισμό, το ελάχιστο πλήθος των "καλών" χωρίων είναι 176 και το μέγιστο πλήθος τους είναι 221, να βρεθούν τα k, n .

Διάρκεια εξέτασης 4 ώρες.

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Καλή επιτυχία!