

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
36^η Εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα « Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ »
23 Φεβρουαρίου 2019
Θέματα και ενδεικτικές λύσεις μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1

Να βρείτε όλες τις τριάδες πραγματικών αριθμών που είναι λύσεις του συστήματος:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 25z^2 = 6xz + 8yz \\ 3x^2 + 2y^2 + z^2 = 240 \end{cases}$$

Λύση

Η πρώτη εξίσωση γράφεται στη μορφή:

$$\begin{aligned} x^2 - 6xz + 9z^2 + y^2 - 8yz + 16z^2 &= 0 \Leftrightarrow (x - 3z)^2 + (y - 4z)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow x - 3z &= 0 \text{ και } y - 4z = 0 \Leftrightarrow x = 3z \text{ και } y = 4z. \end{aligned}$$

Επομένως, όλες οι τριάδες (x, y, z) πραγματικών αριθμών που ικανοποιούν την πρώτη εξίσωση είναι της μορφής:

$$(x, y, z) = (3t, 4t, t), t \in \mathbb{R}.$$

Τότε η δεύτερη εξίσωση γίνεται:

$$3 \cdot 9t^2 + 2 \cdot 16t^2 + t^2 = 240 \Leftrightarrow 60t^2 = 240 \Leftrightarrow t^2 = 4 \Leftrightarrow t = \pm 2.$$

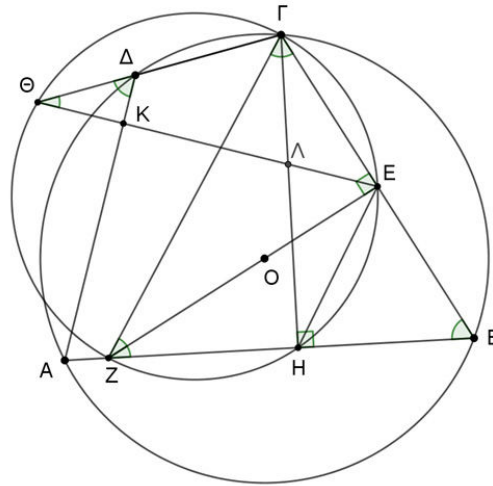
Για $t = 2$ προκύπτει η λύση $(x, y, z) = (6, 8, 2)$, ενώ για $t = -2$ προκύπτει η λύση

$$(x, y, z) = (-6, -8, -2).$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο. Η κάθετη στο μέσον Ε της πλευράς ΒΓ τέμνει την ευθεία ΑΒ σε σημείο Ζ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΓΕΖ τέμνει την πλευρά ΑΒ για δεύτερη φορά στο σημείο Η και την ευθεία ΓΔ σε σημείο Θ διαφορετικό του Δ. Η ευθεία ΕΘ τέμνει την ευθεία ΑΔ στο σημείο Κ και την ευθεία ΓΗ στο σημείο Λ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Η, Λ, Κ είναι ομοκυκλικά, δηλαδή ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

Λύση



Σχήμα 1

Επειδή $\widehat{\Gamma\hat{H}Z} = \widehat{\Gamma\hat{E}Z} = 90^\circ$, έπεται ότι $\widehat{A\hat{H}\Lambda} = 90^\circ$. Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι $\widehat{A\hat{K}\Lambda} = 90^\circ$. Επειδή $\widehat{\Delta\hat{K}\Theta} = \widehat{A\hat{K}\Lambda}$ (ως κατά κορυφή γωνίες), αρκεί να αποδείξουμε ότι στο τρίγωνο $\Delta\hat{\Theta}K$ οι δύο οξείες γωνίες του έχουν άθροισμα 90° , δηλαδή: $\widehat{\Delta\hat{\Theta}K} + \widehat{\Theta\hat{\Delta}K} = 90^\circ$.

Όμως έχουμε ότι:

$$\widehat{\Delta\hat{\Theta}K} = \widehat{\Gamma\hat{\Theta}E} = \widehat{\Gamma\hat{Z}E} \text{ (εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο)}$$

$$\widehat{\Gamma\hat{Z}E} = \widehat{E\hat{Z}B} \text{ (γιατί είναι συμμετρικές ως προς τη μεσοκάθετη της πλευράς B\Gamma)}$$

Άρα έχουμε:

$$\widehat{\Delta\hat{\Theta}K} = \widehat{E\hat{Z}B} \quad (1).$$

Επίσης έχουμε ότι:

$$\widehat{\Theta\hat{\Delta}K} = \widehat{Z\hat{B}E} \quad (2)$$

(εσωτερική και απέναντι εξωτερική γωνία του εγγεγραμμένου τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$)

Επομένως με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$\widehat{\Delta\hat{\Theta}K} + \widehat{\Theta\hat{\Delta}K} = \widehat{E\hat{Z}B} + \widehat{Z\hat{B}E} = 90^\circ,$$

γιατί το τρίγωνο ZBE είναι ορθογώνιο στο E .

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους οι οποίοι είναι ίσοι με 13 φορές το άθροισμα των ψηφίων τους.

Λύση

Έστω κ το πλήθος των ψηφίων του ακεράιου A ο οποίος ισούται με 13 φορές το άθροισμα των ψηφίων του. Ο μικρότερος δυνατός θετικός ακεραίος με κ ψηφία είναι ο $10^{\kappa-1}$, ενώ το μεγαλύτερο δυνατό άθροισμα ψηφίων του είναι 9κ . Επομένως, για να ισχύει το ζητούμενο του προβλήματος θα πρέπει:

$$10^{\kappa-1} \leq 13 \cdot 9\kappa = 117\kappa. \quad (1)$$

Για $\kappa \geq 4$ θα αποδείξουμε ότι: $10^{\kappa-1} > 117\kappa$, δηλαδή δεν ισχύει η σχέση (1).

Πράγματι, για $\kappa = 4$ έχουμε: $10^{4-1} = 10^3 > 117 \cdot 4 = 468$. Αν υποθέσουμε ότι ισχύει: $10^{\kappa-1} > 117\kappa$, για το τυχόν $\kappa > 4$, τότε προκύπτει ότι:

$$10^{(\kappa+1)-1} = 10^\kappa = 10 \cdot 10^{\kappa-1} > 10 \cdot 117\kappa = 117 \cdot 10\kappa > 117 \cdot (\kappa+1).$$

Επομένως το πλήθος κ των ψηφίων του A πρέπει να είναι μικρότερο ή ίσο του 3.

- Η περίπτωση με $\kappa = 1$ αποκλείεται, αφού $A = \alpha < 13\alpha$, με $0 < \alpha \leq 9$.
- Η περίπτωση με $\kappa = 2$ αποκλείεται, αφού $A = 10\alpha + \beta < 13(\alpha + \beta)$.
- Έστω $\kappa = 3$ και $A = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$, με $0 < \alpha \leq 9$, $0 \leq \beta, \gamma \leq 9$. Τότε πρέπει:

$$100\alpha + 10\beta + \gamma = 13 \cdot (\alpha + \beta + \gamma), \text{ με } 0 < \alpha \leq 9, 0 \leq \beta, \gamma \leq 9$$

$$\Leftrightarrow 87\alpha = 3\beta + 12\gamma, \text{ με } 0 < \alpha \leq 9, 0 \leq \beta, \gamma \leq 9$$

$$\Leftrightarrow 29\alpha = \beta + 4\gamma, 0 < \alpha \leq 9, 0 \leq \beta, \gamma \leq 9$$

Επειδή ισχύει: $0 \leq \beta + 4\gamma \leq 45 \Rightarrow 29\alpha \leq 45 \Rightarrow \alpha \leq 1 \Rightarrow \alpha = 1$ (αφού $\alpha \neq 0$), οπότε έχουμε:

$$\beta + 4\gamma = 29 \Rightarrow \beta = 29 - 4\gamma \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \beta = 29 - 4\gamma \leq 9$$

$$\Rightarrow -29 \leq -4\gamma \leq -20 \Rightarrow 5 \leq \gamma \leq \frac{29}{4} \Rightarrow \gamma \in \{5, 6, 7\}$$

- Για $\gamma = 5 \Rightarrow \beta = 29 - 4\gamma = 9$ και $A = 195$.
- Για $\gamma = 6 \Rightarrow \beta = 29 - 4\gamma = 5$ και $A = 156$.
- Για $\gamma = 7 \Rightarrow \beta = 29 - 4\gamma = 1$ και $A = 117$.

Πρόβλημα 4

Στον πίνακα είναι γραμμένοι οι θετικοί ακέραιοι: 1, 2, 3, ..., 2018. Ο Γιάννης και η Μαρία έχουν τη δυνατότητα να κάνουν μαζί την παρακάτω κίνηση:

Επιλέγουν δύο αριθμούς α, β από αυτούς που είναι γραμμένοι στον πίνακα και τους αντικαθιστούν με τους αριθμούς $5\alpha - 2\beta$ και $3\alpha - 4\beta$.

Ο Γιάννης ισχυρίζεται ότι μετά από πεπερασμένο πλήθος τέτοιων κινήσεων μπορούν να τριπλασιαστούν όλοι οι αριθμοί του πίνακα, δηλαδή να προκύψουν οι αριθμοί: 3, 6, 9, ..., 6054. Η Μαρία σκέπτεται για λίγο και του απαντά ότι αυτό δεν είναι δυνατό να γίνει. Ποιος από τους δύο έχει δίκιο και γιατί;

Λύση

Παρατηρούμε ότι σε κάθε κίνηση το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στον πίνακα μεταβάλλεται όσο η διαφορά:

$$(5\alpha - 2\beta) + (3\alpha - 4\beta) - (\alpha + \beta) = 7\alpha - 7\beta = 7(\alpha - \beta) = \text{πολ.}7$$

Αυτό σημαίνει ότι μετά από κάθε εφαρμογή της παραπάνω κίνησης η διαφορά του αθροίσματος $\Sigma_{\text{νέο}}$ των αριθμών που είναι γραμμένοι στον πίνακα μείον το άθροισμα $\Sigma_{\text{αρχικό}}$ των αριθμών που ήταν αρχικά γραμμένοι στον πίνακα είναι αριθμός πολλαπλάσιος του 7, δηλαδή

$$\Sigma_{\text{νέο}} - \Sigma_{\text{αρχικό}} = \text{πολ.}7.$$

Επομένως τα αθροίσματα $\Sigma_{\text{αρχικό}}$ και $\Sigma_{\text{νέο}}$ διαιρούμενα με το 7 πρέπει να δίνουν το ίδιο υπόλοιπο.

$$\text{Όμως } \Sigma_{\text{αρχικό}} = 1 + 2 + 3 + \dots + 2018 = \frac{2018 \cdot 2019}{2} = 1009 \cdot 2019 \equiv 1 \cdot 3 \pmod{7} \equiv 3 \pmod{7}.$$

Επιπλέον, αν μετά από πεπερασμένο πλήθος κινήσεων φθάσουμε στους αριθμούς $3, 6, 9, \dots, 6054$, τότε το άθροισμα τους θα είναι

$$\Sigma_{\text{τελικό}} = 3 + 6 + 9 = \dots + 6054 = 3 \cdot \Sigma_{\text{αρχικό}} \equiv 3 \cdot 3 \pmod{7} \equiv 2 \pmod{7}$$

Επειδή τα υπόλοιπα των αθροισμάτων $\Sigma_{\text{αρχικό}}$ και $\Sigma_{\text{τελικό}}$ όταν διαιρούνται με το 7 είναι διαφορετικά συμπεραίνουμε ότι δεν μπορούν να προκύψουν στον πίνακα οι αριθμοί $3, 6, 9, \dots, 6054$ και επομένως έχει δίκιο η Μαρία.

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
36^η Εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα « Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ »
23 Φεβρουαρίου 2019
Θέματα και ενδεικτικές λύσεις μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1

Η ακολουθία α_n έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = 1$ και ορίζεται αναδρομικά από τον τύπο

$$\alpha_n = 5\alpha_{n-1} + 3^{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Να υπολογίσετε το γενικό όρο α_n και να βρείτε τη μεγαλύτερη δύναμη του 2 που διαιρεί τον όρο α_k , όπου $k = 2^{2019}$.

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Σύμφωνα με τον ορισμό της ακολουθίας έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 5\alpha_1 + 3 \\ \alpha_3 = 5\alpha_2 + 3^2 \\ \alpha_4 = 5\alpha_3 + 3^3 \\ \dots \\ \alpha_{n-1} = 5\alpha_{n-2} + 3^{n-2} \\ \alpha_n = 5\alpha_{n-1} + 3^{n-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5^{n-1}\alpha_1 = 5^{n-1} \\ 5^{n-2}\alpha_2 = 5^{n-1}\alpha_1 + 5^{n-2} \cdot 3 \\ 5^{n-3}\alpha_3 = 5^{n-2}\alpha_2 + 5^{n-3} \cdot 3^2 \\ 5^{n-4}\alpha_4 = 5^{n-3}\alpha_3 + 5^{n-4} \cdot 3^3 \\ \dots \\ 5\alpha_{n-1} = 5^2\alpha_{n-2} + 5 \cdot 3^{n-2} \\ \alpha_n = 5\alpha_{n-1} + 3^{n-1} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{πρόσθεση} \\ \text{κατά μέλη} \\ \Rightarrow \end{array}$$

$$\alpha_n = 5^{n-1} + 5^{n-2} \cdot 3 + 5^{n-3} \cdot 3^2 + 5^{n-4} \cdot 3^3 + \dots + 5 \cdot 3^{n-2} + 3^{n-1} = \frac{5^n - 3^n}{5 - 3} = \frac{1}{2}(5^n - 3^n),$$

για κάθε $n = 1, 2, 3, \dots$

Διαφορετικά μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= 5^{n-1} \cdot \left[1 + \frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \dots + \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \right] = 5^{n-1} \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}{1 - \frac{3}{5}} \\ &= 5^{n-1} \cdot \frac{5}{2 \cdot 5^n} (5^n - 3^n) = \frac{1}{2}(5^n - 3^n), \text{ για κάθε } n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε: $\alpha_n = \frac{1}{2}(5^n - 3^n)$, για κάθε $n = 1, 2, 3, \dots$

Για την εύρεση του γενικού όρου, εναλλακτικά μπορούμε να εργαστούμε ως εξής:
 Από τον ορισμό της ακολουθίας διαπιστώνουμε ότι:

$$\alpha_1 = 1 = \frac{1}{2}(5-3), \alpha_2 = 5 \cdot 1 + 3 = 8 = \frac{1}{2}(5^2 - 3^2), \alpha_3 = 5 \cdot 8 + 3^2 = 49 = \frac{1}{2}(5^3 - 3^3), \dots$$

Ισχυριζόμαστε ότι πρέπει να ισχύει $\alpha_n = \frac{1}{2}(5^n - 3^n)$, για κάθε $n = 1, 2, 3, \dots$, το οποίο αποδεικνύουμε με μαθηματική επαγωγή.

Τώρα για $k = 2^{2019}$, χρησιμοποιώντας διαδοχικά την ταυτότητα διαφοράς τετραγώνων, έχουμε

$$2a_k = 5^{2^{2019}} - 3^{2^{2019}} = 2 \cdot (5+3)(5^2 + 3^2) \dots (5^{2^{2018}} + 3^{2^{2018}}),$$

οπότε

$$a_k = (5+3)(5^2 + 3^2) \dots (5^{2^{2018}} + 3^{2^{2018}}).$$

Παρατηρούμε τώρα, ότι εκτός από την πρώτη παρένθεση που διαιρείται από 8, όλες οι άλλες παρενθέσεις διαιρούνται από το 2 αλλά όχι από το 4.

Πράγματι, ισχύει ότι: $5^{2^v} \equiv 1 \pmod{4}$ και $3^{2^v} \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow 5^{2^v} + 3^{2^v} \equiv 2 \pmod{4}$, για κάθε $v \geq 1$.

Οι παρενθέσεις από το $5^2 + 3^2$ μέχρι το $(5^{2^{2018}} + 3^{2^{2018}})$, είναι συνολικά 2018, οπότε η μεγαλύτερη δύναμη του 2 που διαιρεί τον αριθμό είναι $2^3 \cdot \underbrace{2^1 \cdot \dots \cdot 2^1}_{2018 \text{ το πλήθος}} = 2^{2021}$.

Εναλλακτικά θα μπορούσε κάποιος να χρησιμοποιήσει μία ειδική μορφή του λήμματος ανύψωσης του εκθέτη (Lifting the Exponent Lemma) το οποίο αφορά το μέγιστο εκθέτη της δύναμης του 2 που διαιρεί μία διαφορά δυνάμεων με βάσεις ακέραιους. Σημειώνουμε με $v_p(\alpha)$ το μέγιστο εκθέτη της δύναμης του πρώτου θετικού ακέραιου p που διαιρεί τον ακέραιο α , δηλαδή ισχύει ότι: $p^{v_p(\alpha)} | \alpha$ και $p^{v_p(\alpha)+1}$ δεν διαιρεί το α .

Λήμμα: Έστω α, β δύο περιττοί ακέραιοι και v ένας άρτιος θετικός ακέραιος. Τότε ισχύει ότι:

$$v_2(\alpha^v - \beta^v) = v_2(\alpha - \beta) + v_2(\alpha + \beta) + v_2(v) - 1$$

Απόδειξη.

Θα χρησιμοποιήσουμε ότι το τετράγωνο περιττού ακέραιου είναι της μορφής $4\kappa + 1$, οπότε ο ακέραιος 4 διαιρεί τη διαφορά $\alpha^2 - \beta^2$. Αν ο v γράφεται στη μορφή $v = \mu \cdot 2^k$, τότε:

$$\begin{aligned} v_2(\alpha^v - \beta^v) &= v_2(\alpha^{\mu \cdot 2^k} - \beta^{\mu \cdot 2^k}) = v_2\left(\left(\alpha^2\right)^{\mu \cdot 2^{k-1}} - \left(\beta^2\right)^{\mu \cdot 2^{k-1}}\right) = \\ &\dots = v_2(\alpha^2 - \beta^2) + \mu - 1 = v_2(\alpha - \beta) + v_2(\alpha + \beta) + v_2(v) - 1. \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το παραπάνω λήμμα για τον ακέραιο $2a_{2^{2019}} = 5^{2^{2019}} - 3^{2^{2019}}$ λαμβάνουμε:

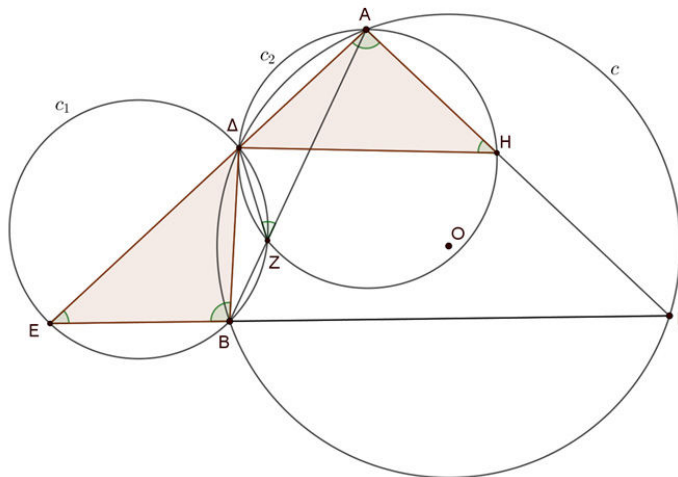
$$v_2(2a_{2^{2019}}) = v_2(5^{2^{2019}} - 3^{2^{2019}}) = v_2(5 - 3) + v_2(5 + 3) + v_2(2^{2019}) - 1 = 1 + 3 + 2019 - 1 = 2022,$$

οπότε τελικά έχουμε: $v_2(a_k) = 2021$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$ με $AB < A\Gamma < B\Gamma$ και έστω Δ το μέσο του μικρού τόξου \widehat{AB} . Η ευθεία $A\Delta$ τέμνει την ευθεία $B\Gamma$ στο σημείο E και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $B\Delta E$ (έστω c_1) τέμνει την AB (για δεύτερη φορά) στο σημείο Z . Αν ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $A\Delta Z$ (έστω c_2) τέμνει (για δεύτερη φορά) την $A\Gamma$ στο σημείο H να αποδείξετε ότι $BE = AH$.

Λύση (1^{ος} τρόπος)



Σχήμα 1

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $A\Delta B\Gamma$ έχουμε ότι:

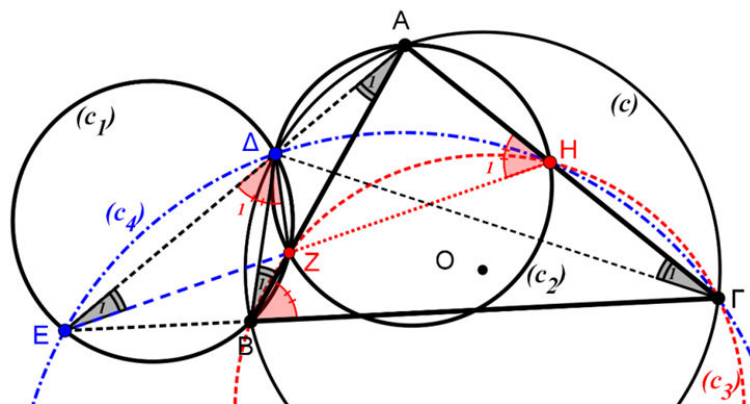
$$\widehat{\Delta A H} = \widehat{\Delta B E} \quad (1)$$

Από τα εγγεγραμμένα τετράπλευρα $AEBZ$ και $A\Delta ZH$ προκύπτουν οι ισότητες γωνιών:

$$\widehat{A \hat{E} B} = \widehat{A \hat{Z} A} = \widehat{A \hat{H} \Delta} \quad (2)$$

Επειδή το Δ είναι το μέσο του μικρού τόξου AB , έπεται ότι: $A\Delta = \Delta B$. Από τις ισότητες γωνιών (1) και (2) και την ισότητα $A\Delta = \Delta B$ συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα $A\Delta H$ και $\Delta E B$ είναι ίσα, οπότε θα έχουν και τις πλευρές BE και AH ίσες.

2^{ος} τρόπος



Σχήμα 2

Εφόσον το σημείο Δ είναι το μέσο του μικρού τόξου AB , θα ισχύουν οι ισότητες:

$$\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1 = \frac{\widehat{\Gamma}}{2}.$$

Άρα οι κύκλοι (c_1) και (c_2) είναι ίσοι μεταξύ τους διότι η (κοινή) χορδή ΔZ φαίνεται υπό ίσες γωνίες ($\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$).

Για να αποδείξουμε λοιπόν ότι τα τμήματα BE, AH (που είναι χορδές των ίσων κύκλων (c_1) και (c_2)) είναι ίσα μεταξύ τους, αρκεί να αποδείξουμε ότι οι γωνίες που βαίνουν σε αυτά είναι ίσες, δηλαδή ότι $\widehat{BZE} = \widehat{AZH}$ ή ότι τα σημεία E, Z, H είναι συνευθειακά.

Στο τρίγωνο $ΑΕΓ$, το σημείο Z είναι το σημείο Μiquel του τριγώνου, ως σημείο τομής των περιγεγραμμένων κύκλων $BE\Delta, AH\Delta$. Επομένως το τετράπλευρο $BZH\Gamma$ είναι και αυτό εγγεγραμμένο σε κύκλο έστω (c_3) . Αυτό προκύπτει εύκολα και από ισότητες γωνιών.

Θεωρούμε τώρα τους κύκλους $(c_1), (c_2)$ και (c_3) . Οι κοινές χορδές τους συντρέχουν στο ριζικό τους κέντρο. Οι κοινές χορδές τους όμως είναι οι $A\Delta, ZH, B\Gamma$, οπότε αυτές συντρέχουν. Έπεται ότι η ZH περνά από το σημείο E , που είναι το ζητούμενο.

Εναλλακτικά μπορούμε να αποφύγουμε τη χρήση του σημείου Μiquel ως εξής. Έχουμε

$$\widehat{ZB\Gamma} \stackrel{\text{εξωτερική στο } BZ\Delta E}{=} \widehat{E\Delta Z} \stackrel{\text{εξωτερική στο } A\Delta Z H}{=} \widehat{A\Delta HZ},$$

οπότε το τετράπλευρο $BZH\Gamma$ είναι και αυτό εγγεγραμμένο σε κύκλο έστω (c_3) . Από το θεώρημα της δύναμης σημείου E ως προς κύκλο (c) έχουμε $EB \cdot EG = EA \cdot EA$

Όμως το αριστερό μέλος είναι η δύναμη του E ως προς τον (c_3) και το δεξί μέλος είναι η δύναμη του E ως προς τον (c_2) . Έπεται ότι το E ανήκει στον ριζικό άξονα αυτών των δύο κύκλων, που είναι η κοινή τους χορδή ZH , δηλαδή το E ανήκει ZH , που είναι το ζητούμενο.

Πρόβλημα 3

Να βρείτε όλα τα ζεύγη (x, y) θετικών ρητών αριθμών που ικανοποιούν την εξίσωση

$$yx^y = y + 1$$

Λύση

Θέτουμε $y = \frac{p}{q}$, σε ανάγωγη μορφή με $p, q \in \mathbb{N}^*$, $(p, q) = 1$. Αντικαθιστώντας παίρνουμε:

$$x^{\frac{p}{q}} = \frac{y+1}{y} = \frac{\frac{p}{q}+1}{\frac{p}{q}} = \frac{p+q}{p},$$

Και υψώνοντας και τα δύο μέλη στην $\frac{q}{p}$ παίρνουμε:

$$x = \sqrt[p]{\frac{(p+q)^q}{p^q}}.$$

Επειδή το αριστερό μέλος είναι ρητός, θα πρέπει το ίδιο να ισχύει και για το δεξί μέλος. Επιπλέον $(p+q, p)=1$, οπότε θα πρέπει ο αριθμητής και ο παρονομαστής του κλάσματος να είναι τέλειες p δυνάμεις. Άρα πρέπει

$$p+q = a^p \quad \text{και} \quad p = b^p, \quad a, b \in \mathbb{N}^*, a > 1$$

Αν όμως $b \geq 2$, έχουμε ότι $b^p \geq 2^p > p$, οπότε πρέπει $b = 1$, άρα $p = 1$ και $q = a - 1$. Επομένως τα ζεύγη λύσεων δίνονται παραμετρικά

$$(x, y) = \left(a^{a-1}, \frac{1}{a-1} \right), \quad a \in \mathbb{N}^*, a > 1.$$

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε ορθογώνιο $\nu \times \mu$, με $\nu \leq \mu$, το οποίο υποδιαιρούμε με παράλληλες ευθείες προς τις πλευρές του σε $\nu\mu$ μοναδιαία τετράγωνα. Αρχικά τοποθετούμε από ένα μαύρο πιόνι σε N μοναδιαία τετράγωνα και στη συνέχεια προσπαθούμε να γεμίσουμε τον πίνακα με μαύρα πιόνια εκτελώντας την παρακάτω επιτρεπόμενη κίνηση:

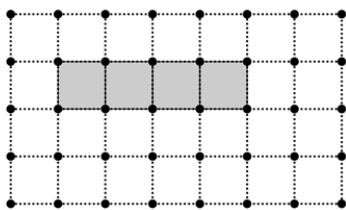
Αν ένα κενό μοναδιαίο τετράγωνο έχει κοινή πλευρά με δύο τουλάχιστον μοναδιαία τετράγωνα κατειλημμένα με μαύρο πιόνι, τότε τοποθετούμε και σε αυτό το μοναδιαίο τετράγωνο ένα μαύρο πιόνι.

Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή του αριθμού N των μαύρων πιονιών που πρέπει και αρκεί να υπάρχουν σε μία αρχική τοποθέτηση, έτσι ώστε μετά από πεπερασμένο πλήθος διαδοχικών εφαρμογών της επιτρεπόμενης κίνησης να γεμίσει το ορθογώνιο με μαύρα πιόνια.

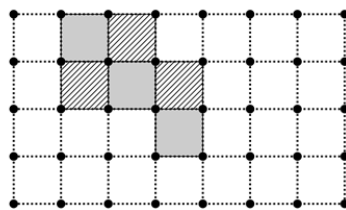
Λύση

Αριθμούμε τις γραμμές του ορθογωνίου από το 1 μέχρι το ν και τις στήλες από το 1 μέχρι το μ .

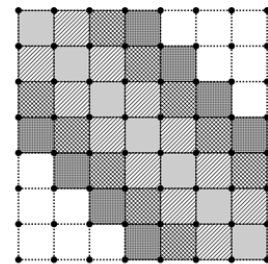
Για $\nu = \mu$ το ορθογώνιο είναι τετράγωνο $\nu \times \nu$, ενώ για $\nu < \mu$ το ορθογώνιο αποτελείται από ένα τετράγωνο $\nu \times \nu$ και από ένα ορθογώνιο $\nu \times (\mu - \nu)$. Παρατηρούμε ότι δύο διπανά τετράγωνα της ίδιας γραμμής ή της ίδιας στήλης με μαύρα πιόνια δεν δίνουν την δυνατότητα πλήρωσης κάποιου άλλου μοναδιαίου τετραγώνου. Όταν όμως είναι διαδοχικά στην ίδια μεγάλη ή μικρή διαγώνιο τότε δίνουν τη δυνατότητα πλήρωσης δύο μοναδιαίων τετραγώνων, όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.



Σχήμα 2(α)



Σχήμα 2(β)



Σχήμα 2(γ)

Έτσι για την περίπτωση με $\nu = \mu$, αν τοποθετήσουμε στη κύρια διαγώνιο του τετραγώνου ν μαύρα πιόνια, τότε είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι με διαδοχικές κινήσεις μπορούμε να γεμίσουμε το τετράγωνο με μαύρα πιόνια.

Αν υποθέσουμε ότι $\nu < \mu$, τότε στο $\nu \times \nu$ τετράγωνο τοποθετούμε ξανά στη διαγώνιο τα ν μαύρα πιόνια, οπότε μπορούμε να γεμίσουμε το $\nu \times \nu$ τετράγωνο με μαύρα πιόνια. Στη συνέχεια διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $\mu - \nu$ περιττός, δηλαδή αν οι μ, ν είναι ο ένας άρτιος και ο άλλος περιττός, τοποθετούμε στην τομή της $\nu + 1$ -στήλης με τη ν -οστή γραμμή ένα μαύρο πιόνι. Με αυτό το τετράγωνο μπορούμε πλέον να γεμίσουμε τη $(\nu + 1)$ -στήλη με μαύρα πιόνια. Κάνουμε το ίδιο και για τα μοναδιαία τετράγωνα $(\nu, \nu + 3), \dots, (\nu, \nu + 2\kappa - 1)$ και σταματάμε όταν: $\nu + 2\kappa - 1 = \mu \Leftrightarrow \mu - \nu = 2\kappa - 1$. Έτσι έχουμε τοποθετήσει μαύρα πιόνια στα μοναδιαία τετράγωνα $(\nu, \nu + 2\kappa - 1)$, για $\kappa = 1, 2, \dots, \frac{\mu - \nu + 1}{2}$. Τότε είναι εύκολο να γεμίσουμε τα ενδιάμεσα τετράγωνα της ν -οστής γραμμής με μαύρα πιόνια και στη συνέχεια όλες τις στήλες του ορθογωνίου. Παρατηρούμε ότι συνολικά στην περίπτωση αυτή ο **ικανός αριθμός** μαύρων πιονιών είναι

$$\nu + \frac{\mu - \nu + 1}{2} = \frac{\mu + \nu + 1}{2}.$$

- Αν $\mu - \nu$ άρτιος, τοποθετούμε στην τομή της $\nu + 2\kappa$ -στήλης με τη ν -οστή γραμμή ένα μαύρο πιόνι, για $\kappa = 1, 2, \dots, \frac{\mu - \nu}{2}$. Με αυτά τα τετράγωνα μπορούμε πλέον να γεμίσουμε τη $(\nu + 1)$ -στήλη με μαύρα πιόνια και στη συνέχεια όλες τις στήλες του ορθογωνίου. Παρατηρούμε ότι συνολικά στην περίπτωση αυτή ο **ικανός αριθμός** μαύρων πιονιών είναι

$$\nu + \frac{\mu - \nu}{2} = \frac{\mu + \nu}{2}.$$

Για τις δύο περιπτώσεις μπορούμε να γράψουμε τον αριθμό των μαύρων πιονιών που χρησιμοποιήσαμε στην ενιαία μορφή

$$\left\lfloor \frac{\mu + \nu + 1}{2} \right\rfloor.$$

Επομένως ο ελάχιστος δυνατός αριθμός N πιονιών που απαιτείται για το γέμισμα του πίνακα με μαύρα πιόνια είναι:

$$N \leq \left\lfloor \frac{\mu + \nu + 1}{2} \right\rfloor. \quad (1)$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι ο παραπάνω αριθμός N είναι και αναγκαίος για να ισχύει το ζητούμενο του προβλήματος. Ισοδύναμα, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$N \geq \left\lfloor \frac{\mu + \nu + 1}{2} \right\rfloor \quad (2)$$

Ονομάζουμε μία πλευρά ενός μοναδιαίου τετραγώνου **ασπρόμαυρη**, αν είναι πλευρά ενός μόνο μοναδιαίου τετραγώνου που έχει μαύρο πιόνι. Για παράδειγμα ασπρόμαυρες είναι όλες οι πλευρές μοναδιαίων τετραγώνων που βρίσκονται πάνω στις πλευρές του δεδομένου ορθογωνίου. Υποθέτουμε ότι μία αρχική τοποθέτηση μαύρων πιονιών στα μοναδιαία τετράγωνα περιέχει N μαύρα πιόνια. Τότε ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός ασπρόμαυρων πλευρών είναι $4N$.

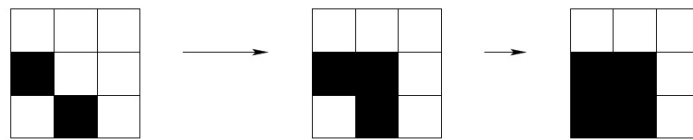
Σε κάθε κίνηση που εκτελούμε, αν το μοναδιαίο τετράγωνο έχει κοινή πλευρά με $\kappa \geq 2$ μοναδιαία τετράγωνα που έχουν μαύρα πόνια, τότε στο τετράγωνο αυτό τοποθετείται μαύρο πόνι και δημιουργούνται $4 - \kappa$ ασπρόμαυρες πλευρές. Επειδή $4 - \kappa \leq \kappa$, ο αριθμός των ασπρόμαυρων τετραγώνων δεν αυξάνει. Όμως σε κάθε περίπτωση πρέπει να είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τα ασπρόμαυρες πλευρές του ορθογωνίου που υπάρχουν στις πλευρές του ορθογωνίου, ακόμα και όταν όλα τα μοναδιαία τετράγωνα αποκτήσουν μαύρο πόνι, και συνολικά είναι $2(\nu + \mu)$, δηλαδή πρέπει: $4N \geq 2(\nu + \mu) \Rightarrow N \geq \frac{\mu + \nu}{2}$. Επειδή ο N είναι

ακέραιος, πρέπει $N \geq \left\lceil \frac{\mu + \nu + 1}{2} \right\rceil$.

Επομένως ο ζητούμενος αριθμός είναι ο $N = \left\lceil \frac{\mu + \nu + 1}{2} \right\rceil$.

2^{ος} τρόπος:

Θα ονομάζουμε το σύνολο όλων των μαύρων τετραγώνων «μαύρη περιοχή». Η βασική παρατήρηση είναι ότι αν ένα λευκό τετράγωνο έχει τουλάχιστον δύο μαύρα γειτονικά τετράγωνα, τότε μετά την επιτρεπόμενη κίνηση η περίμετρος της μαύρης περιοχής δεν μειώνεται, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Στο παραπάνω σχήμα αυτό η περίμετρος της μαύρης περιοχής παραμένει ίσο με 8 μετά τις δύο κινήσεις.



Στο παραπάνω σχήμα η περίμετρος στην αρχή είναι 12 και στη συνέχεια γίνεται 10, δηλαδή μειώνεται κατά 2.

Αν λοιπόν έχουμε στην αρχή N μαύρα τετράγωνα, τότε η αρχική περίμετρος της μαύρης περιοχής είναι το πολύ $4N$. (Είναι ακριβώς $4N$ όταν δεν υπάρχουν γειτονικά μαύρα τετράγωνα). Αν λοιπόν στο τέλος το ορθογώνιο έχει μόνο μαύρα τετράγωνα, η περίμετρος της μαύρης περιοχής είναι η περίμετρος του ορθογωνίου, δηλαδή $2\mu + 2\nu$.

Οπότε από τη βασική παρατήρηση στην αρχική θα έχουμε:

$$4N \geq \text{αρχική περίμετρος} \geq \text{τελική περίμετρος} = 2\mu + 2\nu$$

Έπεται ότι, $N \geq \frac{\mu + \nu}{2}$ και αφού ο N είναι ακέραιος, θα έχουμε $N \geq \left\lceil \frac{\mu + \nu}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{\mu + \nu + 1}{2} \right\rfloor$. Θα

αποδείξουμε ότι πάντα γίνεται με $\left\lfloor \frac{\mu + \nu + 1}{2} \right\rfloor$ μαύρα τετράγωνα, οπότε αυτή θα είναι και η

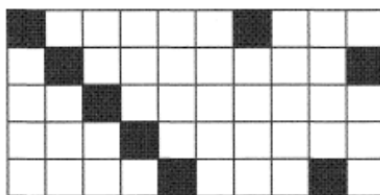
ελάχιστη τιμή.

Για το παράδειγμα, τοποθετούμε ν μαύρα τετράγωνα στην κύρια διαγώνιο του $\nu \times \nu$ τετραγώνου πάνω αριστερά. Στο ορθογώνιο που μένει αφήνουμε την πρώτη στήλη άδεια, στη δεύτερη βάζουμε κάπου ένα μαύρο τετράγωνο, αφήνουμε την επόμενη στήλη άδεια κοκ, μέχρι να φτάσουμε στην τελευταία στήλη όπου βάζουμε οπωσδήποτε ένα μαύρο τετράγωνο.

Τοποθετούμε με αυτόν τον τρόπο άλλα $\left\lfloor \frac{\mu - \nu + 1}{2} \right\rfloor$ μαύρα τετράγωνα, οπότε συνολικά

$\nu + \left\lfloor \frac{\mu - \nu + 1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\mu + \nu + 1}{2} \right\rfloor$, που είναι το ζητούμενο πλήθος.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το παράδειγμα σε ένα ορθογώνιο 5×10 , όπου τοποθετήσαμε 5 μαύρα τετράγωνα στην κύρια διαγώνιο του 5×5 τετραγώνου, αφήσαμε μία στήλη κενή, στην επόμενη βάλουμε ένα μαύρο και στην συνέχεια τοποθετήσαμε και στην τελευταία.



Μένει να δικαιολογήσουμε ότι με την παραπάνω τοποθέτηση που προτείναμε, μετά από πεπερασμένες κινήσεις, όλο το ορθογώνιο θα έχει μαύρα τετράγωνα. Πράγματι, στην αρχή η κύρια διαγώνιος του $\nu \times \nu$, βήμα-βήμα κάνει μαύρα όλα τα τετράγωνα του $\nu \times \nu$ τετραγώνου και στη συνέχεια με τη βοήθεια των μαύρων που έχουμε τοποθετήσει σε στήλη παρά στήλη, κάνουν όλες τις υπόλοιπες στήλες μαύρες.