ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α' : ΘΕΩΡΙΑ ΒΙΒΛΙΟΥ

ΘΕΜΑ Β'

Β1 Θέτουμε στην θέση του x, το $x-1$ και παίρνουμε:
$f(x)=x\cdot e^{-(x-1)}$ ή $f(x)=x\cdot e^{1-x}$ ή $f(x)=\frac{x}{e^{x-1}}$

Β2 $f'(x)=e^{1-x}+x(1-x)'e^{1-x}$ ή $f'(x)=e^{1-x}-xe^{1-x}=(1-x)e^{1-x}$
Η ρίζα της $f'(x)=0$ είναι η $x=1$
Αν $x<1$, τότε $f'(x)>0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα
Αν $x>1$, τότε $f'(x)<0$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα
Αυτό σημαίνει επίσης ότι παρουσιάζει μέγιστο στη θέση $x=1$, το $f(1)=1$

Β3 $f''(x)=(1-x)'e^{1-x}+(1-x)(1-x)'e^{1-x}$ ή $f''(x)=-e^{1-x}(2-x)$ ή
$f''(x)=-e^{1-x}-(1-x)e^{1-x}$ ή
$f''(x)=(x-2)e^{1-x}$.
Αν $x<2$, τότε $f''(x)<0$ δηλαδή η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω (κοίλη)
Αν $x>2$, τότε $f''(x)>0$ δηλαδή η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω (κυρτή). Στη θέση $x=2$ παρουσιάζει σημείο καμπής το $(2,f(2))=(2,\frac{2}{e})$.
Αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη. Έχουμε: $\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$ και $\lim_{x\to-\infty}e^{1-x}=+\infty$, άρα
$\lim_{x\to-\infty}(x\cdot e^{1-x})=-\infty$
Επίσης: $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}e^{1-x}=0$, οπότε έχουμε αοριστία $(-\infty)\cdot 0$
Με βάση την $f(x)=\frac{x}{e^{x-1}}$ έχουμε: $\lim_{x\to+\infty}x'=1$, $\lim_{x\to+\infty}e^{x-1}=+\infty$
Άρα, από κανόνα De L'Hospital έχουμε: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{0}{+\infty}=0$
Δηλαδή, η $\boxed{y=0}$ (άξονας $x'x$) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$.

Παρατηρούμε ότι δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη της μορφής (2)
$y=\lambda x+\beta$, με $\lambda\neq 0$

B4) (i) $\lim_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$, $f(1)=1$, άρα αν $x\in\Delta_1=(-\infty,1]$ τότε
$y\in f(\Delta_1)=(-\infty,1]$ (αφού f γνησίως αύξουσα)
$\lim_{x\to +\infty} f(x)=0$, άρα, αν $x\in\Delta_2=(1,+\infty)$, τότε $y\in f(\Delta_2)=(0,1)$
Άρα, το σύνολο τιμών της είναι $(-\infty,1]\cup(0,1)=(-\infty,1]$
(ii) · Αν $\lambda\leq 0$ η $h(x)=f(x)-\lambda$, έχει ακριβώς μία λύση
στο Δ_1 αφού $\lambda\in f(\Delta_1)$ και f γνησίως μονότονη
Αν $0<\lambda<1$ τότε η h έχει:
· ακριβώς μία λύση στο Δ_1 αφού $\lambda\in f(\Delta_1)$ και f γνησίως μονότονη
· ακριβώς μία λύση στο Δ_2 αφού $\lambda\in f(\Delta_2)$ και f " "
Για $\lambda=1$ ακριβώς μία λύση την $x=1$

Για $\lambda>1$ καμία λύση (αδύνατη)

ΘΕΜΑ Γ΄

Γ1 Εντός των διαστημάτων είναι συνεχής
Στη θέση 0 είναι επίσης συνεχής αφού

$f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$

Παραγωγισιμότητα στο 0

- $\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} (ax^2 - 3x - 1) = -1$
- $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$ (γνωστό όριο από θεωρία)

Άρα η f μη παραγ/μη στο 0

Γ2 i) Η f είναι συνεχής στο $[0, \frac{3\pi}{2}]$ και παραγωγίσιμη ως τριγωνομετρική στο $(0, \frac{3\pi}{2})$

$f(0) = 1$, $f(\frac{3\pi}{2}) = 0$. Άρα δεν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle.

(ii) Παρατηρούμε ότι $f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{3\pi}{2}) = 0$, άρα στο $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \subseteq [0, \frac{3\pi}{2}]$ έχουμε ότι $\exists\, \xi \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$ με $f'(x) = -\eta\mu x$

$-\eta\mu x = 0 \Rightarrow \boxed{x = \pi}$, είναι μοναδική επειδή στο $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ η f είναι γνησίως αύξουσα.

Γ3 Έστω $x_0 < 0$ τέτοιο που $f'(x_0) = 0$ με

$f'(x) = 3ax^2 - 6x - 1$, $x \leq 0$

$\Delta = 36 + 12a = 12(3 + a) < 0$. Άρα δεν υπάρχει .....

Γ4 Θέτουμε $g(x) = f(x) + 1$, αν $x \in (-\infty, \frac{3\pi}{2}]$, οπότε

$$g(x) = \begin{cases} ax^3 - 3x^2 - x + 2, & x \leq 0 \\ \sigma\upsilon\nu x + 1, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$ και αρκεί $g(x) \geq 0$

Αν $x \in (0, \frac{3\pi}{2})$, τότε $g(x) + 1 = \sigma\upsilon\nu x + 1 \geq 0$

Αν $x \leq 0$, τότε $g(0) = 2$ και

$g'(x) = 3ax^2 - 6x - 1 < 0$, για κάθε $x \leq 0$

Άρα η g είναι γν. φθίνουσα, οπότε $x \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x) \geq g(0) = 2 > 0$

ΘΕΜΑ Δ.

Δ1 Έστω $K(x)=\ln x-\frac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$

· Η K είναι συνεχής στο $[1,e]$ ως πράξεις συνεχών
· Η K " παραγ/μη στο $(1,e)$ " " "
· $K(1)\cdot K(e)=-(1-\frac{1}{e})<0$

Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει ρίζα x_0 της εξίσωσης $K(x_0)=0$ στο $(1,e)$

Είναι $K'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$ άρα η K είναι γν. αύξουσα στο $(0,+\infty)$ άρα η ρίζα x_0 είναι μοναδική

Δ2 Ισχύει $\ln x_0=\frac{1}{x_0} \Leftrightarrow x_0\ln x_0=1 \Leftrightarrow x_0^{x_0}=e$ (1)
Η f είναι παρ/μη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\ln x_0-\frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{x-x_0}{x x_0}$

· $f'(x)=0 \Rightarrow x=x_0$
· $f'(x_0)>0 \Rightarrow x>x_0$
· $f'(x_0)<0 \Rightarrow x<x_0$

Καταλαβαίνουμε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(x_0)=\ln x_0(x_0+1)-\ln x_0-1=\ln x_0\cdot x_0-1=0$

Δ3 Ζητούμε $x\in\mathbb{R}$ τ.ω $g(x)=h(x) \Leftrightarrow x e^{-x}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow$
$xe=x_0^{x+1}$ οπότε:
Είναι καθαρό ότι $x>0$ οπότε:
$\ln(xe)=\ln x_0^{x+1} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x=x_0$ και επειδή η f παρουσιάζει μοναδικό ολικό ελάχιστο για $x=x_0$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$$

$$g'(x_0) = e^{-x_0}(1-x_0)$$

Επίσης, η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$h'(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \ln\frac{x_0}{e}$ οπότε $h'(x_0) = \frac{x_0^{x_0} x_0}{e^{x_0} e}(\ln x_0 - 1)$

δηλαδή $h'(x_0) = g'(x_0)$

Συνεπώς $g(x_0) = h(x_0)$ και $g'(x_0) = h'(x_0)$

επομένως έχουν κοινή εφαπτομένη.

Δ4) • Αν η φ στο x_0 δεν είναι παραγωγίσιμη τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο.

• Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε παίρνουμε

$d(A,B) = |\varphi(x) - f(x)| = f(x) - \varphi(x)$

έτσι, η $\ell(x) = f(x) - \varphi(x)$ παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 αφού $\ell'(x_0) = f'(x_0) - \varphi'(x_0)$, το x_0 είναι εσωτερικό του $(0,+\infty)$ Άρα από Θ. Fermat

$\ell'(x_0) = 0$ δηλαδή το x_0 είναι κρίσιμο σημείο

ΘΕΜΑ Α4

α) Σ

β) Λ

γ) Σ

δ) Σ

ε) Σ