

**20 Οκτωβρίου 2012**  
**ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΗΣ Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ**

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1**

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = \\ &= 2 \cdot \left(\frac{2}{2} - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{3} - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{4}{4} - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{5}{5} - \frac{1}{5}\right) = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{5} = \\ &= \frac{2}{5} = \\ &= \frac{24}{60} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{(3^2 - 2^3)^{2012}}{(3^2 + 1)^2 \cdot 0,01 + 2^5 : 2^4} = \\ &= \frac{(9 - 8)^{2012}}{(9 + 1)^2 \cdot 0,01 + 2} = \\ &= \frac{1^{2012}}{10^2 \cdot 0,01 + 2} = \\ &= \frac{1}{100 \cdot 0,01 + 2} = \\ &= \frac{1}{1 + 2} = \\ &= \frac{1}{3} = \\ &= \frac{20}{60} \end{aligned}$$

Άρα

α)  $B < A$  και

β)  $B = \frac{20}{60} < \frac{21}{60} < \frac{22}{60} < \frac{23}{60} < \frac{24}{60} = A$

*Παρατήρηση:* Ένας γρήγορος τρόπος να παρεμβάλουμε ένα κλάσμα ανάμεσα σε δύο άλλα, είναι να προσθέτουμε αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή, δηλαδή:

$$\frac{1}{3} < \frac{1+2}{3+5} < \frac{2}{5}, \text{ δηλαδή } \frac{1}{3} < \frac{3}{8} < \frac{2}{5} \text{ και ομοίως } \frac{1}{3} < \frac{4}{11} < \frac{3}{8} < \frac{5}{13} < \frac{2}{5}$$

Βέβαια, στη συνέχεια, πρέπει να αποδείξουμε τις ανισώσεις κάνοντας τα κλάσματα ομώνυμα, η διαφορετικά να αποδείξουμε τη γενικότερη ανισότητα:

$$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} < \frac{\gamma}{\delta}, \text{ όταν } \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta}$$

(που απαιτεί εξοικείωση με τις μεταβλητές και παραπέμπει σε ύλη μεγαλύτερης τάξης)

**Μία πρακτική εξήγηση (όχι αυστηρή μαθηματική απόδειξη), είναι και η παρακάτω:**

Ας υποθέσουμε ότι σε ένα αγώνα μπάσκετ, ένας παίκτης έχει 1 στις 3 πετυχημένες βολές στο πρώτο ημίχρονο και 2 στις 5 στο δεύτερο. Σε όλο τον αγώνα, έχει 3 στις 8. Το συνολικό ποσοστό του δεν μπορεί να είναι καλύτερο και από τα δύο ημίχρονα, ούτε όμως και χειρότερο από τα δύο. Είναι κάτι ενδιάμεσο (όχι απαραίτητα ο λεγόμενος μέσος όρος).

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Ένας αριθμός διαιρείται με το 15 αν και μόνο αν διαιρείται με το 3 και με το 5.

Όμως, ένας αριθμός διαιρείται με το 5 αν και μόνο αν το τελευταίο του ψηφίο είναι 0 ή 5 οπότε  $\beta=0$  ή  $\beta=5$ .

**Περίπτωση 1<sup>η</sup>)** Αν  $\beta=0$  τότε ο αριθμός έχει τη μορφή 8726 $\alpha$ 24150 ο οποίος διαιρείται με το 3 αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3, δηλαδή αν  $8+7+2+6+\alpha+2+4+1+5+0=35+\alpha$  είναι πολλαπλάσιο του 3 όπου το  $\alpha$  μπορεί να πάρει ακέραιες τιμές από 0 έως 9.

Έτσι για  $\alpha=1$  είναι  $35+\alpha=35+1=36$  το οποίο είναι πολλαπλάσιο του 3,  
για  $\alpha=4$  είναι  $35+\alpha=35+4=39$  το οποίο είναι πολλαπλάσιο του 3 και  
για  $\alpha=7$  είναι  $35+\alpha=35+7=42$  το οποίο είναι πολλαπλάσιο του 3.

Άρα σε αυτή την περίπτωση οι ζητούμενοι αριθμοί είναι:

**8726124150, 8726424150 και 8726724150**

**Περίπτωση 2<sup>η</sup>)** Αν  $\beta=5$  τότε ο αριθμός έχει τη μορφή 8726 $\alpha$ 24155 ο οποίος διαιρείται με το 3 αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3, δηλαδή αν  $8+7+2+6+\alpha+2+4+1+5+5=40+\alpha$  είναι πολλαπλάσιο του 3 όπου το  $\alpha$  μπορεί να πάρει ακέραιες τιμές από 0 έως 9.

Έτσι για  $\alpha=2$  είναι  $40+\alpha=40+2=42$  το οποίο είναι πολλαπλάσιο του 3,  
για  $\alpha=5$  είναι  $40+\alpha=40+5=45$  το οποίο είναι πολλαπλάσιο του 3 και  
για  $\alpha=8$  είναι  $40+\alpha=40+8=48$  το οποίο είναι πολλαπλάσιο του 3.

Άρα σε αυτή την περίπτωση οι ζητούμενοι αριθμοί είναι:

**8726224155, 8726524155 και 8726824155**

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

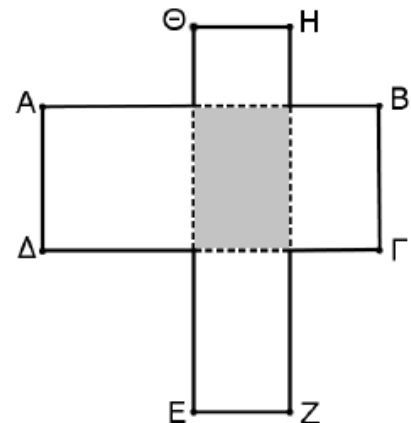
α) Από το σχήμα εύκολα συμπεράνουμε ότι η περίμετρος του σταυρού είναι:

$$\text{Περίμετρος} = 2 \cdot AB + 2 \cdot HZ = 2 \cdot 7 + 2 \cdot 8 = 14 + 16 = 30 \text{ μονάδες}$$

(*Παρατήρηση:* Οι πλευρές  $AD, B\Gamma$  συμπληρώνουν τα διακεκομμένα μέρη των  $E\Theta, ZH$ , όπως και οι  $\Theta H, EZ$  συμπληρώνουν τα διακεκομμένα μέρη των  $AB, \Delta\Gamma$ .)

β) Επίσης από το σχήμα συμπεράνουμε ότι το εμβαδό του σταυρού είναι:

$$\begin{aligned} E &= E_{(AB\Gamma\Delta)} + E_{(EZ\Theta H)} - E_{(\Gamma\text{ΚΡΙ\_ΠΕΡΙΟΧΗΣ})} = \\ &= 7 \cdot 3 + 8 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = \\ &= 21 + 16 - 6 = \\ &= 31 \text{ τετραγωνικές μονάδες} \end{aligned}$$



(*Παρατήρηση:* Το εμβαδό της γκρι περιοχής το έχουμε μετρήσει δύο φορές, μία στο εμβαδό του ορθογώνιου  $AB\Gamma\Delta$  και άλλη μία στο εμβαδό του ορθογώνιου  $EZH\Theta$  και αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο το αφαιρέσαμε μία φορά)

#### ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Αν ο Γιώργος δώσει 7€ στη Μαρία, θα έχουν τα ίδια χρήματα. Επομένως ο Γιώργος, έχει 14€ παραπάνω από τη Μαρία.

Επίσης, αφού η αναλογία χρημάτων του Γιώργου προς αυτά της Μαρίας είναι 5:4, ο Γιώργος έχει 5πλάσια χρήματα από όσο είναι η διαφορά του από την Μαρία. Δηλαδή, ο Γιώργος έχει  $5 \cdot 14 = 70€$  και η Μαρία  $70 - 14 = 56€$  ευρώ.

Τέλος, ο Μανώλης έχει  $56 - 14 = 42€$ , καθώς οι διαφορές Γιώργου-Μαρίας και Μαρίας-Μανώλης είναι ίσες, λόγω της αναλογίας 5:4:3.

#### 2<sup>ος</sup> τρόπος

Ας υποθέσουμε ότι ο Γιώργος, η Μαρία και ο Μανώλης έχουν  $\gamma$ ,  $\mu$  και  $\sigma$  χρήματα, τα οποία είναι ανάλογα με τους αριθμούς 5, 4 και 3 αντίστοιχα.

Οπότε θα είναι:

$$\frac{\gamma}{5} = \frac{\mu}{4} = \frac{\sigma}{3} = \kappa, \text{ όπου } \kappa \text{ ο συντελεστής αναλογίας}$$

δηλαδή

$$\gamma = 5\kappa, \quad \mu = 4\kappa \quad \text{και} \quad \sigma = 3\kappa$$

Αν ο Γιώργος δώσει 7€ στη Μαρία τότε οι δυο τους θα έχουν ίσο αριθμό χρημάτων.

Αυτό όμως σημαίνει ότι,

$$\gamma - 7 = \mu + 7$$

όπου αντικαθιστώντας το  $\gamma = 5\kappa$  και το  $\mu = 4\kappa$  έχουμε,

$$5\kappa - 7 = 4\kappa + 7$$

$$5\kappa - 4\kappa = 7 + 7$$

$$\kappa = 14$$

Οπότε

$$\gamma = 5\kappa = 5 \cdot 14 = 70, \quad \mu = 4\kappa = 4 \cdot 14 = 56 \quad \text{και} \quad \sigma = 3\kappa = 3 \cdot 14 = 42$$

Άρα ο Γιώργος έχει 70€, η Μαρία 56€ και ο Μανώλης 42€.

#### 3<sup>ος</sup> τρόπος

Κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα αναλόγων ποσών,

Γιώργος	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70
Μαρία	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56
Μανώλης	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42

Παρατηρούμε ότι η τελευταία στήλη του πίνακα ικανοποιεί τις υποθέσεις του προβλήματος άρα αυτό είναι και τα ποσό των χρημάτων που έχει καθένα από τα παιδιά στον κουμπαρά του.

(Παρατήρηση: Ο τρόπος αυτός δεν δουλεύει αν οι λύσεις είναι δεκαδικοί αριθμοί.)