ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
26η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Θέματα μικρών τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Αν ο αριθμός

$$K = \frac{9n^2+31}{n^2+7}$$

είναι ακέραιος, να προσδιορίσετε τις τιμές του ακέραιου n.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Από την κορυφή Α ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ημιευθεία Ax που τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Δ. Πάνω στην Ax παίρνουμε σημείο Ε τέτοιο ώστε $\mathrm{BA}=\mathrm{BE}$. Να υπολογίσετε τη γωνία $\mathrm{A\hat{E}\Gamma}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Θεωρούμε τους αριθμούς

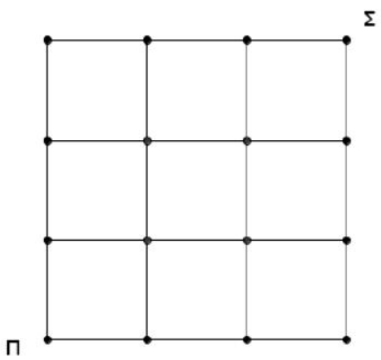
$$\mathrm{A} = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{595}{598}\cdot\frac{597}{600} \quad \text{και} \quad \mathrm{B} = \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{6}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{596}{599}\cdot\frac{598}{601}.$$

Να αποδείξετε ότι:

(α) $\mathrm{A} < \mathrm{B}$, **(β)** $\mathrm{A} < \dfrac{1}{5990}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Το διπλανό σχεδιάγραμμα παρουσιάζει τους δρόμους που συνδέουν τη πλατεία μιας πόλης (σημείο Π) με το σχολείο (σημείο Σ). Στη πλατεία βρίσκονται k μαθητές και ξεκινούν με προορισμό το σχολείο έχοντας τη δυνατότητα να κινούνται (στο σχεδιάγραμμα) μόνο προς τα δεξιά και προς τα άνω. Αν οι μαθητές είναι ελεύθεροι να επιλέξουν οποιαδήποτε διαδρομή (με σκοπό να φτάσουν στο σχολείο), να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή του k έτσι, ώστε οπωσδήποτε δύο τουλάχιστον μαθητές να ακολουθήσουν την ίδια διαδρομή.



Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Καλή επιτυχία!

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
26η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Θέματα μεγάλων τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές του θετικού ακέραιου n για τις οποίες ο αριθμός

$$A=\sqrt{\frac{9n-1}{n+7}}$$

είναι ρητός.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με περίκεντρο Ο και A_1, B_1, Γ_1 τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Θεωρούμε τα σημεία A_2, B_2, Γ_2 έτσι ώστε: $\overrightarrow{OA_2}=\lambda\cdot\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB_2}=\lambda\cdot\overrightarrow{OB_1}$ και $\overrightarrow{O\Gamma_2}=\lambda\cdot\overrightarrow{O\Gamma_1}$ με $\lambda>0$. Αποδείξτε ότι οι ευθείες $AA_2, BB_2, \Gamma\Gamma_2$ συντρέχουν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν οι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί x, y και z έχουν άθροισμα 2, να αποδείξετε ότι:

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+xyz\le 1.$$

Για ποιες τιμές των x, y και z αληθεύει η ισότητα;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνονται οι διαφορετικοί μεταξύ τους μιγαδικοί αριθμοί $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$ των οποίων οι εικόνες $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ είναι διαδοχικά σημεία του κύκλου με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $r>0$. Αν w είναι μία λύση της εξίσωσης $z^2+z+1=0$ και ισχύουν οι σχέσεις:

$$z_1w^2+z_3w+z_5=0 \quad \text{(I)},$$
$$z_2w^2+z_4w+z_6=0 \quad \text{(II)}$$

να αποδείξτε ότι:

(α) Το τρίγωνο $A_1A_3A_5$ είναι ισόπλευρο,

(β) $|z_1-z_2|+|z_2-z_3|+|z_3-z_4|+|z_4-z_5|+|z_5-z_6|+|z_6-z_1|==3|z_1-z_4|=3|z_2-z_5|=3|z_3-z_6|$.

Διάρκεια εξέτασης 4 ώρες .
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Καλή επιτυχία!***